Tentamen Dynamische Systemen
18 April 2007, 09:00 – 12:00 uur
Examenhal

1 Typisch gedrag

Beschouw een gladde functie $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en daarbij de tweede orde differentiaalvergelijking

$$x'' = -\frac{dV}{dx}(x). \tag{1}$$

Schrijf deze bewegingsvergelijking als een dynamisch systeem met als toestandsruimte het (x, y)-fasevlak, waarbij $y = x'$.

1. Definieer $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$ en laat zien dat H een behouden grootheid is, d.w.z., dat langs elke evolutie $\{(x(t), y(t)) \mid t \geq 0\}$ van het dynamisch systeem geldt dat $H' \equiv 0$.
2. Toon aan dat bovenstaand dynamisch systeem geen attractoren kan hebben.
3. Omschrijf voor $V_1(x) = x^3 - x$ and $V_2(x) = x^3 + x$ het typische gedrag van het bijbehorende dynamische systeem. Schets de bijbehorende faseportretten.
4. Hoe verandert dit als we (1) veranderen tot

   $$x'' = -\frac{dV}{dx}(x) - cx', \tag{2}$$

   voor een constante $c > 0$? Schets opnieuw de bijbehorende faseportretten.

2 Constante vectorvelden op de torus

Op de 2-torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ beschouwen we coordinaten (x_1, x_2) modulo $\mathbb{Z}$. Voor een vector $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$ beschouwen we het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega_1 \\ \dot{x}_2 &= \omega_2, \end{aligned} \tag{3}$$

waarbij we Ω de *frequentie-vector* noemen. Laat A een 2×2-matrix zijn met gehele coefficienten en met $\det A = 1$; je mag aannemen dat A een diffeomorfisme $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ definieert. Beschouw het via φ uit (3) getransformeerde stelsel differentiaalvergelijkingen. Toon aan dat dit dezelfde vorm heeft als (3), maar nu met frequentie-vector $A\Omega$.

3 Chaos

We beschouwen de afbeelding $f : [0, 1] \to [0, 1]$, gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{als } x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{als } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1. Schets de grafieken van f en f^2 (de twee keer geïtereerde).
2. Ontwerp een symbolische dynamica voor f.
3. Bewijs nu dat
   (a) De periodieke punten van f dicht in $[0, 1]$ liggen;
   (b) De uiteindelijke dekpunten van f dicht in $[0, 1]$ liggen;
   (c) f een baan heeft die dicht in $[0, 1]$ ligt.
4. Gegeven een dichte baan $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) | n \geq 0\}$, toon dan voor de bijbehorende waarde van de verstrooiïngsexponent E aan dat $E = \ln 2$.